Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le degré, le coefficient dominant et le terme constant des polynômes suivants :

$$P = (X+1)^n - (X-1)^n \qquad Q = (X(1-X))^n$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$:

1) $XP = P'$
2) $P = XP'$
3) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$
4) $P \circ P = P$

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $P(X+1) - P(X)$ en fonction du degré de P.

Exercice 4. Déterminer tous les polynômes P tels que $P(2) = 6$, $P'(2) = 1$ et $P^{(n)}(2) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Montrer que f n'est pas une fonction polynômiale.

Exercice 6. Déterminer $p, q \in \mathbb{R}^2$ pour que $X^3 + pX + q$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

Exercice 8. On pose $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
Déterminer $A \wedge B$ puis un couple de coefficients de Bézout pour A et B.

Exercice 9. On pose $A = X^4 + 1$ et $B = X^3 - 1$. Déterminer $A \wedge B$, $A \vee B$ et un couple de coefficients de Bézout.

Exercice 10 (***Un grand classique***)**.** Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1) On suppose que $m \mid n$. Montrer que $X^m - 1 \mid X^n - 1$.
2) Montrer que si la division euclidienne de n par m est donnée par $n = mq + r$, alors la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ est donnée par $X^n - 1 = (X^m - 1)Q + (X^r - 1)$ où Q un polynôme que l'on précisera.
3) ($\star$) Montrer que $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X^{m \wedge n} - 1$.

Conséquence de la question 3 : $m \wedge n = 1$ si et seulement si $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X - 1$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n := 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n$. Montrer que P_n n'admet pas de racine multiple.

Exercice 12. Montrer que 1 est racine triple de $P = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 13. Déterminer $m > 0$ de sorte que $P = X^3 - 6X + m$ admette une racine double. Quelle est l'autre racine ?

Exercice 14. Que vaut la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ (racines n-ièmes de l'unité) ? Que vaut leur produit ?

Exercice 15. Déterminer les solutions des systèmes suivants :

1) $\begin{cases} a+b=i \\ ab=-2 \end{cases}$ d'inconnues $a,b\in\mathbb{C}$.

2) $\begin{cases} a+b+c=-2 \\ ab+bc+ca=-1 \\ abc=2 \end{cases}$ d'inconnues $a,b,c\in\mathbb{C}$.

Indication : on pourra considérer le polynôme $P=(X-a)(X-b)(X-c)$.

Exercice 16. Soit $T>0$ et $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est T-périodique, alors P est constant.

Exercice 17. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples. Montrer que P' est scindé à racines simples.
Indication : utililser le théorème de Rolle.

Exercice 18 ($\star$)**.** Trouver les polynômes $P\in\mathbb{K}[X]$ tels que $P'\mid P$.
Indication : si $\deg P\geq 2$, utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 19. Factoriser les polynômes suivants, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:

$P_1=X^4-1$ $\quad$ $P_3=X^3-2$ $\quad$ $P_5=X^5+X^4$
$P_2=X^2+X+1$ $\quad$ $P_4=X^4+X^2+1$ $\quad$ $P_6=X^6+1$

Exercice 20. Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $P(X)=\sum_{k=0}^{n}X^k$. Calculer $(X-1)P(X)$. En déduire une décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$.

Exercice 21. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que

1) $P(1)=2$, $P(2)=3$ et $P(3)=6$.
2) $P(1)=a$, $P(2)=b$ et $P(3)=c$ avec $a,b,c\in\mathbb{C}$.

Exercice 22. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$:

- $F_1=\dfrac{1}{X^3+1}$
- $F_2=\dfrac{2X+1}{X^3-X}$
- $F_3=\dfrac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-4)}$
- $F_4=\dfrac{X^5+X+1}{X^4-1}$

Exercice 23 ($\star$)**.** Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F=\dfrac{X}{X^4+X^2+1}$.

En déduire $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}$.